抛物线与费马数的有趣联系

737100 甘肃省金昌市第一中学 董安林

一、相关背景

费马在1640年给梅森的一封信中断言“形如$2^{2^n}+1$的数永远是素数”．虽然1732年欧拉推翻了费马这个关于素数的结论，但好像从它诞生之日起，就注定了它是数学的焦点之一，人们不厌其烦地寻找它，探索它．最新成果是2004年5月Payam Samidoost发现F_{472097}是合数．

二、相关概念

1．费马数：形如$2^{2^n}+1$的数叫做费马数．记$F_n=2^{2^n}+1$, $n=0, 1, 2, 3, \cdots$.

2．费马数列：通项公式为 $a_n=2^{2^n}+1\,(n\in \mathbf{N}_+)$的数列叫做费马数列．

3．辗转相交法：如图1，抛物线$y^2=2px\,(p>0)$，O是其顶点，x轴是其对称轴，P_1、P_2是其上异于O的两个不同的点，$OP_1\perp OP_2$，$P_1P_2\cap x$轴$=\{E\}$．F是x轴上的任意一点，连结P_1F并延长交抛物线于点P_4，连结P_2F并延长交抛物线于点P_3，$P_3P_4\cap x$轴$=\{A_1\}$．再连结P_1A_1并延长交抛物线于点P_6，连结P_2A_1并延长交抛物线于点P_5，$P_5P_6\cap x$轴$=\{A_2\}$．再连结P_1A_2、P_2A_2，构造P_7、P_8，依次类推，可得点列A_1、A_2、A_3、A_4、$\cdots$．

我们把这种方法叫辗转相交法．

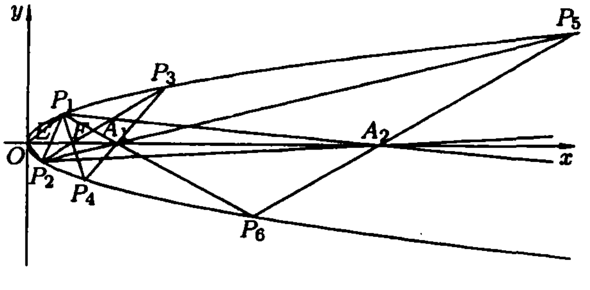

图 1

三、性质及其推导

1．性质：对抛物线$y^2=x-1$实施辗转相交法，所得点列$\{A_n\}$的横坐标成费马数列，即

$$a_n=2^{2^n}+1\,(n\in \mathbf{N}_+),$$

可视为费马数的几何意义．

2．推导：因为抛物线$y^2=x-1$可由抛物线$y^2=x$平移得到，所以不妨先研究抛物线$y^2=x$，如图1．

设$P_i(x_i,y_i)$其中$x_i\neq 0$, $y_i\neq 0$, $i\in \mathbf{N}_+$.

再设$E(a,0)$、$F(b,0)$、$A_i(a_i,0)$, $i\in \mathbf{N}_+$.

$\because OP_1\perp OP_2$,

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$, $y_1^2y_2^2+y_1y_2=0$.

$\therefore y_1\cdot y_2=-1.$ …………………………… ①

设直线P_1P_2的方程为$x=ky+a$，代入$y^2=x$，可得$y^2-ky-a=0$.

$\therefore y_1\cdot y_2=-a.$ …………………………… ②

$\therefore a=1$，即$E(1,0)$.

设$P_1P_4: x=my+b$, $P_2P_3: x=ny+b$.

联立，$\begin{cases} y^2=x, \\ x=my+b, \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=x, \\ x=ny+b. \end{cases}$

得$y^2-my-b=0$, $y^2-ny-b=0$.

得$y_1\cdot y_4=-b,$ …………………………… ③

$y_2\cdot y_3=-b.$ …………………………… ④

③ × ④ 得 $y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot y_4=b^2$.

$\because y_1\cdot y_2=-a$,

$\therefore y_3\cdot y_4=-\dfrac{b^2}{a}.$ …………………………… ⑤

设$P_3P_4: x=sy+a_1$，代入$y^2=x$得

$y^2-sy-a_1=0$,

$\therefore y_3\cdot y_4=-a_1.$ …………………………… ⑥

由 ⑤、⑥ 可得$a_1=\dfrac{b^2}{a}$，即$A_1\left(\dfrac{b^2}{a},0\right)$.

同样的作法，可得$a_2=\dfrac{a_1^2}{a}=\dfrac{\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2}{a}=\dfrac{b^4}{a^3}$, $a_3=\dfrac{a_2^2}{a}=\dfrac{\left(\dfrac{b^4}{a^3}\right)^2}{a}=\dfrac{b^8}{a^7}$, $a_4=\dfrac{a_3^2}{a}=\dfrac{b^{16}}{a^{15}}$, $\cdots$, $a_n=\dfrac{b^{2^n}}{a^{2^n-1}}$，即$A_n\left(\dfrac{b^{2^n}}{a^{2^n-1}},0\right)$.

（下转第10–35页）

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(a^2+b^2, c^2+d^2, (ad+bc)(ac-bd))$$
$$=(a^2+b^2, ac-bd)$$
$$=(c^2+d^2, ac-bd).$$

故$m=(ab,cd)\times(a^2+b^2,ac-bd)=(ab,cd)\times(c^2+d^2,ac-bd)$. ……(4)

将式(3)、(4)代入(2), 立即可知S是正整数. 从而$\triangle ABC$为本原海伦三角形.

② 必要性. 按照舒伯特构造海伦三角形的方法, 因为$\triangle ABC$为海伦三角形, 容易看出(参见文[1]), $\tan\frac{A}{2}$、$\tan\frac{B}{2}$均为有理数. 从而存在a、b、c、$d\in\mathbf{N}$, $(a,b)=1$, $(c,d)=1$, 使得$\tan\frac{A}{2}=\frac{b}{a}$, $\tan\frac{B}{2}=\frac{d}{c}$. 由万能公式, 得

$$\sin A=\frac{2ab}{a^2+b^2}, \cos A=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$
$$\sin B=\frac{2cd}{c^2+d^2}, \cos B=\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}.$$

又因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, 得

$$\sin C=\frac{2(ad+bc)(ac-bd)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

由$\sin C>0$可知$ac>bd$.

根据正弦定理容易看出, 以$ab(c^2+d^2)$、$cd(a^2+b^2)$、$(ad+bc)(ac-bd)$为三边的三角形必与$\triangle ABC$相似. 注意到$\triangle ABC$的三边长互素, 可设m为$ab(c^2+d^2)$、$cd(a^2+b^2)$与$(ad+bc)(ac-bd)$的最大公因数, 则$\triangle ABC$的三边长为$x=\frac{ab(c^2+d^2)}{m}$, $y=\frac{cd(a^2+b^2)}{m}$, $z=\frac{(ad+bc)(ac-bd)}{m}$. 证毕.

定理1给出了本原海伦三角形的一般形式.

三角形的三边长x、y、z与面积S、外接圆半径R有如下熟知的关系:

$$xyz=4RS.$$

本原海伦三角形的三边长由式(1)确定, 代入上式,得

$$R=\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{4m}. \qquad \cdots\cdots(5)$$

定理2　本原海伦三角形的外接圆半径不可能是整数.

证明: 分两种情况讨论.

① 当a、b、c、d均为奇数时, 因为$(a,b)=1$, $(c,d)=1$, 故a^2+b^2与c^2+d^2是偶数, 且均不能被4整除. 从而$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$不能被8整除. 另一方面, 根据式(3)或(4), 可知m为偶数, 故$4m$能被8整除. 由式(5)知R不是整数.

② 当a、b、c、d不全是奇数时, 因为$(a,b)=1$, $(c,d)=1$, 故a与b一奇一偶, 或c与d一奇一偶. 从而$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$不能被4整除. 但$4m$能被4整除. 同样由式(5)可知R不是整数. 证毕.

定理2说明完美海伦三角形不存在.

参考文献

[1] 沈康身. 数学的魅力(1). 上海辞书出版社. 2004年7月.

(上接第10-6页)

令$b=2$, 即取点F为(2, 0)点.

因为$a=1$, 所以$a_n=2^{2^n}$, 即$A_n(2^{2^n},0)$.

现在我们将抛物线$y^2=x$所在的坐标系的y轴向左平移1个单位, 则抛物线变成了$y^2=x-1$, 点E的坐标变成了(2, 0), 点F的坐标变成了(3, 0), 此时我们有$A_n(2^{2^n}+1,0)$, 即$A_n(F_n,0)$, $n\in\mathbf{N}_+$, F_n为费马数.

3.拓展: 若上述抛物线方程改为$y^2=2px$ ($p>0$), 用同样方法作$A_i(a_i,0)$, 则$E(2p,0)$. F是任意点$(b,0)$, 则有$a_n=\frac{b^{2^n}}{a^{2^n-1}}=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{2^n}=2p\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{2^n}$, 令$\frac{b}{a}=\lambda$, 则$a_n=2p\cdot\lambda^{2^n}$. 经平移, 抛物线$y^2=2p(x-1)$对应$a_n=2p\cdot\lambda^{2^n}+1$.

我们不妨将它称作广义费马数.

四、几点想法

1.或许数论可以和几何学更加有机地融合;

2.或许其他圆锥曲线中也有类似的关系;

3.希望广义费马数有一定的发展前景.

参考文献

[1] 李文林. 数学史教程. 高等教育出版社. 2000年8月.

[2] 全日制普通高级中学教科书·数学·第二册. 人民教育出版社. 2004年6月.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net